



1. (1 балл) На чудо-дереве растут бананы и ананасы. За один раз с дерева срывается 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет еще 1 ананас. А если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 банан. В итоге на дереве остался один плод. Что это за плод, если вначале на этом дереве было 12 бананов и 11 ананасов?

2. (2 балла) Из ста абитуриентов на первом экзамене получили хорошие и отличные оценки 80 человек, на втором экзамене – 72, а на третьем – 60 человек. Каким может быть наименьшее число абитуриентов, получивших хорошие и отличные оценки на всех трех экзаменах?

3. (3 балла) По двум прямолинейным шоссе к точке их пересечения с постоянными скоростями двигаются две машины. Известно, что в начальный момент времени расстояние между машинами было 20 км. Через 7 минут это расстояние составило 15 км, а еще через 4 минуты расстояние между машинами сократилось до 13 км. Через какое время (с момента начала движения) расстояние между машинами станет минимальным? Каким будет это расстояние?

4* (4 балла) A cross-country racer runs a 10-mile race in 50 minutes. Prove that somewhere along the course the racer ran 2 miles in exactly 10 minutes.

5. (5 баллов) Два будильника показывают 12 часов дня. Первый спешит на 8 минут, второй отстает на 4 минуты в сутки. Через какое время они снова покажут одновременно 12 часов дня?

6* (6 баллов) Let q be a positive rational number and define a sequence a_1, a_2, a_3, \dots by

$$a_1 = \sqrt{q}, a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}, a_3 = \sqrt{q + \sqrt{q + \sqrt{q}}}, \dots$$

For which q does the sequence converge? Determine for which q the limit of the sequence is an integer.

7* (6 баллов) For $x > 1$ determine the sum of the infinite series:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \dots$$

8* (8 баллов) Prove no six points of a square grid can form a regular hexagon.

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

9.(5 баллов) Ужин. Три молодые супружеские пары собрались на дружеский ужин. Завязалась беседа. При этом были высказаны следующие утверждения:

1. Андрей: Каждый из присутствующих мужчин старше своей жены на 5 лет;
2. Ева: Не стану скрывать: я самая старшая из всех жен.
3. Ильяс: Нам с Бермет вместе 52 года.
4. Тимур: Всем шестерым вместе 151 год.
5. Бермет: Нам с Тимуром вместе 48 лет.

К сожалению, Марина так и не смогла принять участие в застольной беседе, поскольку она то и дело отлучалась на кухню. Тем не менее, можно определить не только возраст всех жен, но и всех мужей. Более того, можно даже выяснить, кто на ком женат. Как это сделать? Отвечая на поставленные вопросы, заполните следующую таблицу:

Номер супружеской пары	Имя мужа	Имя жены	Возраст мужа	Возраст жены
1				
2				
3				

10.(6 баллов) Офицеры. На одном вечере среди гостей оказалось пять офицеров: пехотинец, артиллерист, летчик, связист и сапер. Один из них был капитаном, трое – майорами и один – в звании подполковника. Из разговоров удалось выяснить следующее:

1. У Яна такое же звание, как и у его друга сапера;
2. Офицер-связист и Франц – большие друзья;
3. Офицер-летчик вместе с Борисом и Уланом недавно побывали в гостях у Франца;
4. Незадолго до званого вечера у артиллериста и сапера почти одновременно вышли из строя радиоприемники. Оба в один вечер обратились к Улану с просьбой зайти к ним и помочь связисту устранить неисправность и не ошиблись, поскольку с тех пор приемники у обоих работают отлично;
5. Франц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга сапера избрал иной род войск;
6. Ян по званию старше Улана, а Борис - старше Франца;
7. Пятый офицер, Антон, накануне вечера был в гостях у Улана.

Определите звание каждого офицера и род войск, в котором он служит. (Иерархия военных званий: майор - старше капитана, подполковник - старше майора). Результаты Вашего анализа внесите в следующую таблицу:

Имя офицера	Звание	Род войск
Борис		
Франц		
Ян		
Антон		
Улан		